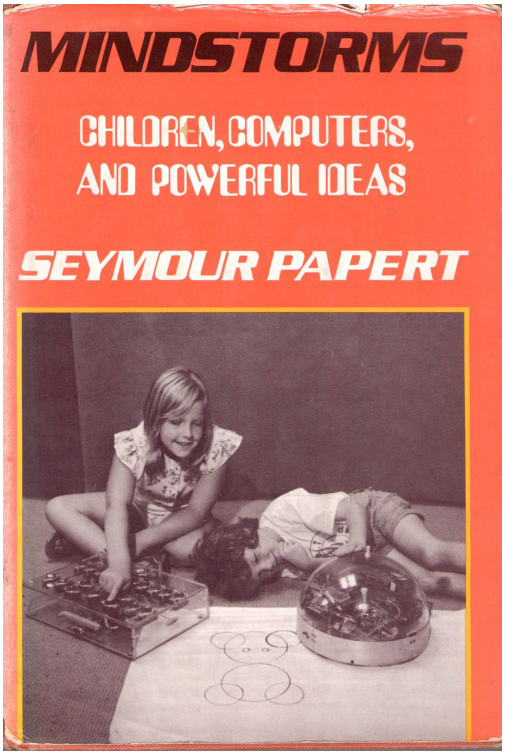
Il papà della tartaruga*



La geometria della Tartaruga

Nella nostra cultura, la maggioranza della gente trova inconcepibile che la matematica scolastica possa essere diversa da quella che è: è la sola matematica che conoscono. Per spezzare questo circolo vizioso, introdurrò il lettore a una nuova area matematica, quella della geometria della Tartaruga, che i miei colleghi e io abbiamo creato per offrire ai bambini una prima base d'esperienza di matematica formale, che sia accessibile e significativa per loro. Ma per meglio comprenderne i criteri progettuali, conviene esaminare più da vicino le condizioni storiche che hanno dettato la forma della matematica scolastica. Alcune di queste condizioni storiche furono di natura pragmatica. Prima dell'apparizione dei computer, vi era la necessità, di ordine pratico-sociale, che un buon numero di persone fossero "programmate" per effettuare delle operazioni, come le lunghissime divisioni, in fretta e accuratamente. Ma poiché attualmente si possono comperare calcolatrici a buon mercato, si dovrebbe riesaminare se è indispensabile o no dedicare centinaia di ore della

---

* L'invenzione della Tartaruga, un micromondo fisico (il robot da pavimento) e virtuale (la versione digitale sullo schermo) per l'apprendimento della matematica, è diventato metafora di ambiente di programmazione per bambini. Il successo del micromondo della Tartaruga ha fatto da traino al linguaggio Logo e alla pratica costruzionista a scuola, ma ha anche finito per oscurarlo —Logo è stato sovente identificato con il linguaggio della tartaruga. Anche l'auspicio che altri micromondi seguissero non si è realizzata. La Tartaruga è il risultato da un lato di un'evoluzione del programma di ricerca di epistemologia genetica (la tartaruga come ulteriore struttura madre) e dall'altro dell'innovazione tecnologica che realizza un micromondo accessibile ai bambini e interessante anche per gli "esperti".
Questo testo cerca di contribuire a una rivalutazione degli aspetti innovativi di ricerca epistemologica di Papert riavvicinando quelle parti di Mindstorms che parlano di linguaggio della tartaruga e di epistemologia. Le considerazioni su computer e strutture madri vengono da un articolo successivo a Mindstorms.
Le varie sezioni di questo testo sono, la mia traduzione in italiano, rispettivamente di: La geometria della Tartaruga (*Mindstorms* capitolo 2, p. 51-54 e *Mindstorms* capitolo 3, p. 55-59); Epistemologia e apprendimento (*Mindstorms* capitolo 7, p. 156-164); Il computer e nuove strutture madri (*The Conservation of Piaget*, p. 9-10).

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas*. New York, NY: Basic Books, Inc.
http://mindstorms.media.mit.edu
Papert, S. (1988). The Conservation of Piaget: The Computer as Grist to the Constructivist Mill. In G. Forman & P. B. Pufall (Eds.), *Constructivism in the computer age* (pp. 3-14). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
http://dailypapert.com/the-conservation-of-piaget-the-computer-as-grist-to-the-constructivist-mill

vita di ogni bambino all'apprendimento di tali funzioni aritmetiche. Io non voglio assolutamente negare il valore intellettuale di una certa conoscenza, anzi, di una approfondita conoscenza, dei numeri. Lungi da me! Ma ora ci è permesso di determinare questa conoscenza su delle basi più selettive, coerenti e razionali. Possiamo liberarci dalla tirannia delle considerazioni superficiali e pragmatiche che dettarono in passato le scelte relative a quello che si doveva apprendere e a quale età bisognava apprenderlo.

Peraltro l'utilità fu solo una delle ragioni storiche che sostennero la matematica scolastica. Altre furono di natura matetica. Per "matetico" intendo l'insieme dei principi che governano l'apprendimento. Alcune delle ragioni storiche della matematica scolastica vanno rapportate a ciò che si poteva imparare e insegnare in epoca preinformatica. A mio avviso, un fattore fondamentale che determinò quale parte della matematica dovesse entrare nei programmi scolastici fu quello delle attività accessibili nell'assetto delle classi, con la tecnologia rudimentale connessa all'uso di carta e matita. Con carta e matita i bambini, per esempio, riescono a disegnare grafici. Quindi si decise di far disegnare ai bambini molti grafici. Lo stesso ordine di considerazioni ha influenzato il rilievo dato a certi tipi di geometria. La "geometria analitica", per esempio, è diventata nella matematica scolastica sinonimo di equazioni rappresentate sotto forma di curve. Il risultato è che ogni persona con un minimo d'istruzione ricorda vagamente che $y = x^2$ è l'equazione di una parabola. Sebbene gran parte dei genitori non abbia che una pallida idea del perché chiunque dovrebbe saperlo, si indigna se i loro figli lo ignorano. Ritengono che, senza dubbio, ci sia una ragione profonda e oggettiva conosciuta da coloro che si intendono della materia. L'ironia è che sia appunto la loro matofobia a trattenere molte persone dal tentare di esaminare attentamente quelle ragioni, abbandonandole così alla mercé dei sedicenti specialisti della matematica. Pochissime persone sospetterebbero che la ragione di ciò che è incluso o no nel programma scolastico di matematica possa essere un dettaglio così crudamente tecnico come l'esigenza di facilitare il disegno a matita delle parabole. È questo che dovrebbe cambiare profondamente; in un mondo ricco di computer la gamma di costruzioni matematiche facili da realizzare sarà immensamente ampliata.

Un altro fattore intervenuto nella creazione della matematica scolastica è la tecnica per valutare l'apprendimento. Una lingua viva si apprende parlando; non c'è bisogno di un insegnante per valutare ogni frase. Una lingua morta esige, invece, dall'insegnante un costante feedback. Nella matematica scolastica è l'attività conosciuta come "esercizi" che realizza questo feedback. Tali assurdi esercizietti ripetitivi non hanno che un merito: sono facili da valutare. Ed è quello che ha assicurato loro una solida posizione al centro della matematica scolastica. In breve, io sostengo che la creazione della matematica in quanto disciplina scolastica sia stata influenzata fortemente da ciò che si riteneva di poter insegnare quando la matematica era insegnata come una disciplina morta, con il solo ausilio di tecnologie rudimentali e passive costituite da: bacchette e sabbia; gesso e lavagna; carta e matita. Il risultato è stato un insieme di contenuti privi di coerenza intellettuale, che viola i più elementari principi matetici su come venga facilitato l'apprendimento di certe materie e reso quasi impossibile quello di altre.

Di fronte a questa eredità scolastica, la formazione matematica può scegliere tra due tipi di approcci. Il primo, più tradizionale, consiste nell'accettare la matematica scolastica come un'entità data e nel battersi per insegnarla così com'è. Alcuni educatori si servono dei computer con questo scopo. Perciò, paradossalmente, l'uso più diffuso del computer nella didattica è quello di somministrare a forza agli allievi i contenuti indigesti ereditati dai tempi preinformatici. Il secondo tipo di approccio è rappresentato dalla geometria della Tartaruga, nella quale il computer ha un uso totalmente differente. Il computer vi è adoperato come un mezzo d'espressione matematica, che rende liberi di ideare degli argomenti di matematica destinati ai bambini e che sono caratterizzati da coerenza intellettuale, da un significato riferito alla personalità di ciascuno di essi e da una grande facilità d'apprendimento. Invece di porci il problema pedagogico di "come insegnare la matematica scolastica esistente", noi ci chiediamo come "ricreare la matematica", o più generalmente come ricreare la conoscenza, per rendere meno laborioso il suo insegnamento.

Ogni "elaborazione del curricolo" potrebbe essere descritta come "creazione di conoscenza". L'introduzione della Nuova Matematica nei programmi degli anni Sessanta, per esempio, è stato un tentativo per cambiare

il contenuto della matematica scolastica. Ma non poteva andare lontano. Si ritornò ancora a quei famosi esercizi, benché fossero resi un poco differenti. Il fatto che gli esercizi fossero applicati a insiemi invece che a numeri, che ci si esercitasse in base due e non in base dieci, non cambiava gran che. La riforma della matematica, inoltre, non lanciava una sfida alla fantasia inventiva dei matematici e così non si procurò mai quella scintilla creativa che segna il prodotto di un nuovo pensiero. Il nome stesso di "Nuova Matematica" era sbagliato. C'era poco di nuovo nel suo contenuto matematico: la cosiddetta matematica moderna non era il risultato di un processo d'invenzione di una matematica destinata ai bambini, ma di una banalizzazione della matematica dei matematici. I bambini necessitano e meritano qualcosa di meglio di una selezione di pezzi della vecchia matematica. Altrimenti, succede come per i vecchi abiti che passano dai fratelli maggiori ai minori: non si adattano mai bene.

La geometria della Tartaruga, fin dall'inizio, ha avuto lo scopo di adattarsi ai bambini. Il suo primario criterio progettuale era che si potesse "farla propria". Naturalmente doveva avere un serio contenuto matematico, ma noi vedremo che le due cose non sono incompatibili. Al contrario, finiremo per renderci conto che parte della conoscenza più personale è anche la più profondamente matematica. In molti casi la matematica —per esempio dello spazio, del movimento, dei modelli ripetitivi d'azione— è quanto di più naturale per i bambini. È in questa matematica che noi radichiamo la geometria della Tartaruga. Man mano che, i miei colleghi e io, lavoravamo su queste idee un certo numero di principi ha strutturato meglio il concetto di una matematica che possa essere fatta propria. Il primo è il principio di continuità: la matematica deve presentare una continuità con le conoscenze personali ben consolidate da cui può ricevere un senso di calore e forza come pure competenza "cognitiva". Il secondo è il principio di potenza: deve permettere a chi apprende di concepire progetti personali carichi di significato, che non avrebbe mai potuto pensare prima. Il terzo, infine, è il principio di risonanza culturale: la materia deve avere senso in un contesto sociale più ampio. Ho già detto che la geometria della Tartaruga deve avere un significato per i bambini. Ma non può averne uno se non è accettata anche dagli adulti. Una vera matematica per i bambini, che sia degna di questo nome, non può essere qualcosa che ci permettiamo di infliggere loro, come una sgradevole medicina, senza vedere alcuna ragione per prenderla noi stessi.

La geometria della Tartaruga è uno stile di geometria diverso dagli altri, come lo stile assiomatico d'Euclide e lo stile analitico di Cartesio erano anch'essi differenti l'uno dall'altro. Lo stile d'Euclide è *logico*; quello di Cartesio è *algebrico*. Lo stile della geometria della Tartaruga è *computazionale*.

Euclide elaborò la sua geometria partendo da un insieme di concetti fondamentali, uno dei quali è il punto. Un punto può definirsi come un'entità che ha una posizione, ma non ha nessun'altra proprietà: non ha colore, né dimensione, né forma. Chiunque non sia mai stato iniziato alla matematica formale (si potrebbe dire che non sia stato ancora matematizzato), spesso trova questa nozione difficile da capire, per non dire bizzarra. È difficile correlarla con qualsiasi altra cosa che si conosca. Anche la geometria della Tartaruga ha un'entità fondamentale simile al punto d'Euclide. Ma quest'entità che io chiamo "Tartaruga", può essere messa in relazione con altre cose già note, perché contrariamente al punto di Euclide essa non è così totalmente sprovvista di proprietà e invece di essere statica è dinamica. Oltre alla sua posizione, la Tartaruga possiede un'altra importante proprietà: ha una direzione. Un punto euclideo è situato in un luogo, ha una posizione, e questo è tutto quello che se ne può dire. Una Tartaruga è in qualche luogo, anch'essa ha una posizione, ma in più guarda in una certa direzione, ha un orientamento. In questo senso, la Tartaruga è paragonabile a un essere umano (io sono qui e guardo verso nord) o a un animale o a una barca. Da queste similitudini deriva la speciale capacità della Tartaruga di servire al bambino come primo esempio tipico di matematica formale. I bambini possono identificarsi con la Tartaruga e ricorrere quindi alla conoscenza che hanno del loro corpo e del suo movimento nell'affrontare la geometria formale.

Per comprendere come ciò avviene, dobbiamo conoscere ancora un'altra cosa sulle Tartarughe: esse sono capaci di ricevere ordini espressi in *linguaggio della tartaruga*. Il comando AVANTI fa muovere la Tartaruga in linea retta nella direzione verso la quale è orientata. Per indicarle la distanza da percorrere, AVANTI deve

essere seguito da un numero: AVANTI 1 provocherà un piccolo spostamento, AVANTI 100 uno più ampio. Negli ambienti LOGO, molti bambini sono stati iniziati alla geometria della Tartaruga insegnando loro a manovrare una tartaruga meccanica, un tipo di robot cibernetico che esegue questi comandi quando li si compone su una tastiera. Questa "Tartaruga da pavimento" ha rotelle, una forma a cupola, e una penna che consente di tracciare una linea quando si muove. Ma le sue proprietà essenziali —posizione, orientamento e capacità di obbedire a ordini in *linguaggio della tartaruga* — sono proprio quelle che servono per fare geometria. Il bambino incontrerà in seguito queste stesse tre proprietà in un'altra personificazione della Tartaruga: una "Tartaruga da schermo". Questa si presenta sotto forma di un oggetto triangolare su uno schermo televisivo. Anch'essa ha una posizione e un orientamento; anch'essa si sposta secondo gli ordini dati in LINGUAGGIO TARTARUGA. Ciascuna delle tartarughe ha i suoi punti forti: quella da pavimento può essere usata come ruspa oltre che come strumento per disegnare, quella da schermo disegna delle linee dai colori luminosi più in fretta di quanto l'occhio possa seguirle. Nessuna delle due è migliore dell'altra, ma il fatto che siano due porta a un'idea potente: due entità fisiche differenti possono essere matematicamente identiche (o "isomorfe")[1].

Gli ordini AVANTI e INDIETRO fanno muovere la Tartaruga in linea retta nella direzione del suo orientamento: la sua posizione cambia, il suo orientamento resta lo stesso. Due altri ordini cambiano l'orientamento senza toccare la posizione: sono DESTRA e SINISTRA che hanno l'effetto di far girare sul posto la Tartaruga. Come per AVANTI, il comando di rotazione deve essere seguito da un numero — un messaggio in entrata — indicante di quanto la Tartaruga deve girare. Un adulto riconoscerà facilmente questi numeri come la misura in gradi dell'angolo di rotazione. Per la maggior parte dei bambini questi numeri devono essere esplorati, il che diventa eccitante e divertente.

Si può ottenere un quadrato con i seguenti comandi:

AVANTI 100 DESTRA 90
AVANTI 100 DESTRA 90
AVANTI 100 DESTRA 90
AVANTI 100 DESTRA 90

Poiché apprendere a controllare la Tartaruga è come apprendere a parlare una lingua, questo esercizio stimola l'abilità e il piacere del bambino nel parlare. E poiché è anche come trovarsi a un posto di comando, stimola la sua abilità e il piacere nel dare ordini. Per far tracciare un quadrato alla Tartaruga dapprima lo percorre lui stesso, descrivendo l'operazione in linguaggio Tartaruga. Così, lavorare con la Tartaruga sollecita anche l'abilità e il gusto del bambino per il movimento. Ci si avvale delle conoscenze già solidamente acquisite dal bambino in fatto di "geometria corporea", come punto di partenza per farlo entrare nella geometria formale.

Le prime esperienze proposte ai bambini in un ambiente d'apprendimento Tartaruga non hanno l'obiettivo di far acquisire regole formali ma di sviluppare la comprensione del modo in cui essi si muovono nello spazio. Questa comprensione è descritta in LINGUAGGIO TARTARUGA e perciò si traduce in "programmi" o "procedure" o "equazioni differenziali" destinati alla Tartaruga. Vediamo più da vicino come un bambino, che ha già appreso a far muovere la Tartaruga in linea retta, per disegnare dei quadrati, dei triangoli e dei rettangoli, possa imparare a programmarla per tracciare un cerchio.

Immaginiamo, dunque, questa scena a cui ho assistito almeno un centinaio di volte. Un bambino domanda: "Come posso farle fare un cerchio?". In un ambiente LOGO l'insegnante non fornisce risposte a tali domande, piuttosto suggerisce al bambino un metodo per risolvere non soltanto questo problema, ma altri dello stesso tipo. Questo metodo è sintetizzato nella frase "gioca alla Tartaruga; prova a metterti al suo posto". Il bambino è incoraggiato a spostarsi, allo stesso modo in cui deve muoversi la Tartaruga sullo schermo, per ottenere il tracciato desiderato. Per il bambino che voleva fare un cerchio, l'operazione si può descrivere come segue:

"Per muoversi in cerchio si fa un piccolo passo avanti, si gira un poco e si continua così". Da questa descrizione a un programma formale, c'è solo un passo:

PER CERCHIO RIPETI [AVANTI 1 DESTRA 1]

Un altro bambino, forse meno esperto nei rudimenti della programmazione, o nell'euristica del "gioco della Tartaruga", potrebbe aver bisogno d'aiuto. Ma l'aiuto non consisterà, ancora una volta, nell'insegnare al bambino come programmare un cerchio, bensì nel proporgli un metodo, una procedura euristica. Questo metodo (che include il consiglio sintetizzato dalla frase "gioca alla Tartaruga") tende a stabilire una solida connessione tra l'attività personale e la creazione di un sapere formale.

Epistemologia e apprendimento

Presenterò un Piaget molto diverso da quello la maggior parte delle persone si aspettano. Non si parlerà di stadi, nessuna enfasi su ciò che i bambini a una certa età possono o non possono imparare a fare. Piuttosto io sarò interessato a Piaget l'epistemologo, come le sue idee hanno contribuito alla teoria cognitiva dell'apprendimento che ho descritto, una teoria che non divorzia lo studio di come si apprende la matematica dallo studio della matematica stessa.

Credo che questi aspetti epistemologici del pensiero di Piaget siano stati sottovalutati perché, finora, non ci hanno offerto alcuna possibilità di azione nel mondo dell'educazione tradizionale. Ma in un ambiente educativo ricco di computer, l'ambiente educativo del prossimo decennio, questo non sarà il caso. Il Piaget della teoria degli stadi è essenzialmente conservatore, quasi reazionario, nel sottolineare ciò che i bambini non possono fare. Io mi sforzo di scoprire un Piaget più rivoluzionario, uno le cui idee epistemologiche potrebbero espandere i limiti conosciuti della mente umana. Per tutti questi anni non si è potuto farlo per mancanza di mezzi di attuazione, ma ora il computer comincia a mettere a disposizione una tecnologia matetica.

Piaget si è descritto come un epistemologo. Che cosa vuol dire con questo? Quando parla del bambino in via di sviluppo, sta in realtà parlando altrettanto dello sviluppo della conoscenza. Questa affermazione ci porta a un contrasto tra l'approccio epistemologico e quello psicologico alla comprensione dell'apprendimento. Nella prospettiva psicologica, il focus è sulle leggi che governano lo studente piuttosto che su ciò che viene appreso. I comportamentisti studiano i programmi di rinforzo, i teorici della motivazione le spinte, quelli della Gestalt studiano la buona forma. Per Piaget è un errore separare il processo di apprendimento da ciò che viene appreso. Per capire come un bambino impara il numero, dobbiamo studiare il numero. E dobbiamo studiarlo in un modo particolare: dobbiamo studiare la struttura del numero, un serio impegno matematico. Questo è il motivo per cui non è affatto raro trovare in uno stesso paragrafo di Piaget riferimento al comportamento dei bambini piccoli e alle preoccupazioni dei matematici teorici. Per rendere più concreta l'idea di studiare l'apprendimento concentrandosi sulla struttura di ciò che si apprende, guardiamo a un pezzo molto concreto di apprendimento preso dalla vita di tutti i giorni. Questo ci aiuterà a vedere come appaia diverso dal punto di vista psicologico e da quello epistemologico.

Prenderemo in considerazione imparare ad andare in bicicletta. In mancanza di ulteriori informazioni andare in bicicletta sembrerebbe essere una cosa davvero notevole. Che cosa lo rende possibile? Si potrebbe proseguire su questa questione studiando il pilota per scoprire quali attributi speciali (velocità di reazione, complessità di funzionamento del cervello, intensità di motivazione) contribuiscono alla sua performance. Questa indagine, anche se potrebbe essere interessante, è irrilevante per la vera soluzione del problema. Le persone possono andare in bicicletta perché questa, una volta in moto, è intrinsecamente stabile. Una bicicletta senza pilota spinta lungo una discesa ripida non cade, ma continuerà la sua corsa a tempo indeterminato giù per la collina. La costruzione geometrica della forcella anteriore assicura che quando la bicicletta si inclina verso sinistra la ruota ruoterà verso sinistra e la bicicletta girerà creando una forza centrifuga che spinge la bicicletta a destra, contrastando la tendenza a cadere. La bicicletta senza un pilota

si equilibra perfettamente. Con un pilota novizio, però, cadrà. Questo perché il novizio ha le intuizioni sbagliate circa il bilanciamento e blocca la posizione della bicicletta in modo che il suo meccanismo correttivo non possa lavorare liberamente. Così imparare ad andare in bicicletta non significa imparare a bilanciare, significa imparare a non sbilanciare, imparare a non interferire.

Quello che abbiamo fatto qui è analizzare un processo di apprendimento attraverso l'acquisizione di una conoscenza più approfondita di ciò che è stato appreso. I principi psicologici non avevano nulla a che fare con esso. Allo stesso modo in cui abbiamo capito come la gente va in bicicletta studiando la bicicletta, Piaget ci ha insegnato che dobbiamo capire come i bambini imparano il numero attraverso una comprensione più profonda di ciò che il numero è.

I matematici interessati alla natura del numero hanno esaminato il problema da diversi punti di vista. Un approccio, associato con i formalisti, cerca di capire il numero definendo assiomi in grado di catturarlo. Un secondo approccio, associato a Bertrand Russell, cerca di definire il numero riducendolo a qualcosa di più fondamentale, per esempio, la logica e la teoria degli insiemi. Sebbene entrambi questi approcci siano validi e importanti capitoli della storia della matematica, non fanno luce sulla questione del perché il numero s'impari. Ma c'è una scuola di matematica che lo fa, anche se questo non era il suo obiettivo. Questa è lo strutturalismo della scuola di Bourbaki. Bourbaki è uno pseudonimo adottato da un gruppo di matematici francesi che hanno deciso di articolare una teoria uniforme per la matematica. La matematica doveva essere una, non un insieme di sottodiscipline ognuna con il proprio linguaggio e la sua linea di sviluppo. Il gruppo si mosse in questa direzione riconoscendo una serie di blocchi costitutivi che ha chiamato "strutture madri". Queste strutture hanno qualcosa in comune con la nostra idea di micromondi. Immaginate un micromondo in cui le cose possono essere ordinate ma non hanno altre proprietà. La conoscenza di come organizzare il mondo, nel linguaggio della scuola bourbakista è la struttura madre dell'ordine. Un secondo micromondo consente rapporti di prossimità, e questa è la struttura madre della topologia. Un terzo ha a che fare con la combinazione di enti per la produzione di nuove entità, questa è la microstruttura algebrica. L'unificazione della matematica, proposta dalla scuola bourbakista, si ottiene considerando strutture più complesse, per esempio l'aritmetica, come combinazioni di strutture più semplici, di cui le più importanti sono le tre strutture madri. Questa scuola non aveva alcuna intenzione di fare una teoria dell'apprendimento. Essi consideravano la loro analisi strutturale come uno strumento tecnico per i matematici da utilizzare nel loro lavoro quotidiano. Ma la teoria delle strutture madri è una teoria dell'apprendimento. Si tratta di una teoria di come il numero sia apprendibile. Mostrando come la struttura dell'aritmetica possa essere scomposta in strutture più semplici, ma comunque significative e coerenti, i matematici stanno mostrando un percorso matetico alla conoscenza numerica. Non è sorprendente che Piaget, alla ricerca di una teoria di numero che spiegasse il suo sviluppo nei bambini, abbia sviluppato una serie parallela di costrutti simili, e poi, una volta "scoperta" la scuola bourbakista sia stato in grado di utilizzarne i costrutti per elaborare la propria.

Piaget ha osservato che i bambini sviluppano strutture intellettuali coerenti che sembrano corrispondere molto da vicino alle strutture madri di Bourbaki. Ad esempio, consideriamo la struttura madre dell'ordine, fin dall'infanzia, i bambini iniziano a sviluppare competenze nell'ordinare le cose. Le strutture madri topologica e algebrica hanno precursori simili nello sviluppo cognitivo. Che cosa le rende apprendibili? Innanzitutto, ognuna rappresenta un'attività coerente nella vita del bambino che potrebbe, in linea di principio, essere appresa e capita indipendentemente dalle altre.

In secondo luogo, la struttura della conoscenza di ciascuno ha una sorta di semplicità interna che Piaget ha elaborato nella sua teoria dei "groupements", e che sarà discussa in termini leggermente diversi in seguito. Terzo, sebbene queste strutture madri siano indipendenti, il fatto che sono apprese in parallelo e che condividono un formalismo comune sono indizi che sono di mutuo soccorso; l'apprendimento di ognuna facilita l'apprendimento delle altre.

Piaget ha utilizzato queste idee per rendere conto dello sviluppo di una varietà di domini di conoscenza in termini di un coerente insieme di strutture, come processi all'interno della mente del bambino. Egli descrive queste strutture interne come sempre in interazione con il mondo esterno, ma la sua enfasi teorica è stata sugli eventi interni. La mia prospettiva è più interventista. I miei obiettivi sono educativi, non solo la conoscenza. Così, nel mio pensiero ho posto una maggiore enfasi su due dimensioni implicite ma non elaborate nel lavoro di Piaget: un interesse nelle strutture intellettuali che potrebbero svilupparsi rispetto a quelle a quelle che effettivamente al momento si sviluppano nel bambino, e la progettazione di ambienti di apprendimento che siano risonanti con esse.

La tartaruga può essere utilizzata per illustrare entrambi questi interessi: primo, l'identificazione di un potente insieme di idee matematiche che non presumiamo essere rappresentate, almeno non in una forma sviluppata, nei bambini; in secondo luogo, la creazione di un oggetto transizionale, la tartaruga, che può esistere nell'ambiente del bambino e metterlo in contatto con le idee. Come matematico, so che una delle idee più potenti nella storia della scienza è stata quella dell'analisi differenziale. Da Newton in poi, il rapporto tra locale e globale ha impostato l'agenda per la matematica. Eppure questa idea non ha avuto spazio nel mondo dei bambini, in gran parte perché tradizionalmente l'accesso a essa dipende da una infrastruttura di formazione matematica formale. Per la maggior parte delle persone, non c'è nulla di più naturale del fatto che le idee più avanzate nel campo della matematica siano inaccessibili ai bambini. Invece, dal punto di vista che ho appreso da Piaget, ci aspetteremmo di trovare delle connessioni. Così abbiamo deciso di cercarle. Ma trovare connessioni non significa semplicemente inventare un nuovo tipo intelligente di pedagogia motivante. Significa un programma di ricerca che ha incluso separare ciò che era potente nell'idea di differenziale dagli accidenti di formalismi inaccessibili. L'obiettivo è quindi di collegare queste strutture scientificamente fondamentali con quelle psicologicamente potenti. E naturalmente queste son le idee alla base del cerchio con la Tartaruga, dei micromondi della fisica e della tartaruga dotata di sensori di contatto.

In che senso l'ambiente naturale è fonte di micromondi, anzi di una rete di micromondi? Restringiamo l'intero ambiente naturale a quelle cose in esso che possono servire come fonte per un micromondo specifico, un micromondo di accoppiamenti, di corrispondenze uno a uno. Molto di ciò che i bambini vedono arriva a coppie: madri e padri, coltelli e forchette, uova e portauova. Anche a loro si chiede di essere costruttori attivi di coppie. Sono invitati a ordinare i calzini, apparecchiare la tavola con un posto per ogni persona e distribuire caramelle. Quando i bambini focalizzano l'attenzione sulle coppie si trovano in un micromondo autocostruito, un micromondo di coppie, nello stesso senso in cui abbiamo messo i nostri studenti nei micromondi di geometria e fisica della Tartaruga. In entrambi i casi il micromondo è spogliato di complessità, è semplice, afferrabile. In entrambi i casi al bambino è permesso di giocare liberamente con i suoi elementi. Anche se ci sono vincoli sui materiali, non ci sono vincoli di esplorazione delle combinazioni. In entrambi i casi la potenza dell'ambiente è nell'essere ricco di scoperte. Lavorare con i computer può rendere più evidente che i bambini costruiscono i propri micromondi personali.

Ho detto che Piaget è un epistemologo, ma non ho elaborato di che tipo. L'epistemologia è la teoria della conoscenza. Il termine epistemologia potrebbe, secondo la sua etimologia, essere utilizzato per coprire tutte le conoscenze sulla conoscenza, ma tradizionalmente è stato utilizzato in modo piuttosto speciale, cioè per descrivere lo studio delle condizioni di validità della conoscenza. L'epistemologia di Piaget non riguarda la validità della conoscenza, ma la sua origine e crescita. Egli si occupa della genesi ed evoluzione delle conoscenze, e segna questo fatto descrivendo il suo campo di studio come "epistemologia genetica". L'epistemologia tradizionale è stata spesso considerata come una branca della filosofia. L'epistemologia genetica lavora per affermarsi come scienza. I suoi studiosi raccolgono dati e sviluppano teorie su come si è sviluppata la conoscenza; a volte concentrandosi sull'evoluzione delle conoscenze nella storia, a volte sull'evoluzione delle conoscenze nell'individuo. Ma non vedono i due domini come distinti. Si cerca di capire le relazioni tra di loro. Queste relazioni possono assumere forme diverse.

Nel caso più semplice lo sviluppo individuale è parallelo allo sviluppo storico, ricordando il detto dei biologi che l'ontogenesi ricapitola la filogenesi. Per esempio, i bambini rappresentano uniformemente il mondo fisico in modo aristotelico; pensano che le forze agiscono sulla posizione piuttosto che sulla velocità. In altri casi, il rapporto è più complesso, fino al punto di una inversione. Strutture intellettuali che appaiono presto nello sviluppo di un bambino a volte sono caratteristiche non degli inizi della scienza, ma di quella più moderna. Così, per esempio, la struttura madre topologica appare molto presto nello sviluppo del bambino, ma la topologia come settore della matematica si è sviluppata solo in tempi moderni. Solo quando la matematica diventa sufficientemente avanzata è in grado di scoprire le proprie origini.

Nella prima parte del ventesimo secolo, la logica formale è stata vista come sinonimo di fondazione della matematica. Ma solo quando è arrivata la teoria strutturalista di Bourbaki si vede uno sviluppo interno alla matematica che ha aperto il campo fino a ricordare le sue radici genetiche. Attraverso l'opera dell'epistemologia genetica, questo ricordare mette in relazione, il più vicino possibile, la matematica allo sviluppo della ricerca su come i bambini costruiscono la loro realtà.

L'epistemologia genetica propone una serie di omologie tra le strutture della conoscenza e le strutture della mente che vengono in essere per cogliere questa conoscenza. Le strutture madri di Bourbaki non sono semplicemente gli elementi che sottendono il concetto di numero; al contrario omologie si ritrovano nella mente mentre questa costruisce per sé il numero. Quindi, l'importanza di studiare la struttura della conoscenza non è solo per capire meglio la conoscenza stessa, ma per capire la persona.

La ricerca sulla struttura di questo processo dialettico si traduce nella convinzione che né la persona né la conoscenza, inclusa la matematica, può essere pienamente compresa l'una separatamente dall'altra. Una convinzione che è stata eloquentemente espressa da Warren McCulloch, che, insieme a Norbert Wiener, dovrebbe avere credito come fondatore della cibernetica. Da giovane, quando gli è stato chiesto quale domanda avrebbe guidato la sua vita scientifica, McCulloch rispose: "Cosa rende l'uomo capace di capire il numero e cosa rende il numero qualcosa che un uomo può capire?"

Per McCulloch come per Piaget, lo studio delle persone e lo studio di ciò che imparano e pensano sono inseparabili.

Il computer e nuove strutture madri

Al Simposio della Società Piaget del 1985 sono stato toccato e colpito dal fatto di essere introdotto, non come il papà del LOGO, ma come il papà della tartaruga perché la tartaruga è di gran lunga più importante del LOGO. Col senno di poi, la tartaruga sussume una struttura madre che è stata altrettanto importante per lo sviluppo storico della matematica, quanto le strutture madri individuate da Piaget. Questa struttura madre della tartaruga è la geometria differenziale che è centrale per la costruzione della fisica matematica dai tempi di Newton fino a oggi.

Questa struttura si vede nel modo più chiaro quando si riflette sul moto di una particella. Questo movimento può essere rappresentato da un vettore differenziale che ha posizione, grandezza e direzione. Così la tartaruga può essere pensata come una struttura madre per il moto di una particella. La tartaruga è logicamente più semplice: il suo stato ha posizione e direzione, ma non ha magnitudine. Quindi questa "struttura tartaruga" ha un tratto familiare a molte delle cose che Piaget ha affrontato, anche se non rientra in modo pulito in una qualsiasi delle sue strutture.

Perché la tartaruga è una struttura madre così importante? Prima di tutto, utilizzando terminologia molto cara a Piaget, mi sono entusiasmato e ho cominciato a pensare che fosse una struttura madre quando ha iniziato a emergere dall'incrocio di due linee. Più e più volte, Piaget ci ha detto di cercare l'intersezione tra lo sviluppo storico della scienza —ciò che è stato epistemologicamente importante per lo sviluppo di ogni scienza della conoscenza— e la psicogenesi del bambino.

La tartaruga cattura quella intersezione perché è un concetto matematico che può essere antropomorfizzato. Il punto di Euclide ha una posizione, ma non ha altre proprietà. Quando questa definizione è insegnata a scuola, di solito evoca una risata o un sorriso di imbarazzo, perché non la si comprende. Che cosa può significare? Un punto ha una posizione, ma non ha una grandezza o un colore? Questo è l'unico esempio che avete mai avuto di un oggetto formale con proprietà molto ridotte, e quindi non significa molto. Quando qualcosa ha due proprietà, ha più senso. Una tartaruga ne ha solo due: la posizione e la direzione —nella sua definizione matematica, questo è ciò che una tartaruga è. È simile non a cose biologiche, ma al concetto euclideo di punto.

Tuttavia la tartaruga è diversa dal punto, in particolare in due modi che appartengono alle due linee di sviluppo intersecanti di cui ho accennato in precedenza. Dal punto di vista della scienza, il punto non è davvero il modo più naturale di fare geometria. Da Galileo in poi, e soprattutto nelle mani di Newton e in tutto lo sviluppo successivo della fisica matematica, siamo arrivati a capire che l'elemento naturale per la geometria è il vettore differenziale, una entità tangente alla curva, che ha sia posizione che direzione. Così la tartaruga davvero cattura un elemento epistemologicamente chiave nell'evoluzione della scienza matematica. in particolare della fisica matematica ma non di meno per l'economia matematica.

Vista dall'altra direzione di sviluppo, dando al punto di Euclide anche una direzione, la tartaruga guadagna in antropomorfizzabilità. Non ci si può davvero identificare con un punto, perché è molto difficile immaginare di avere una posizione e nient'altro. Ma avendo una posizione e guardando da qualche parte, una direzione verso cui camminare, la tartaruga diventa qualcosa con cui è molto più facile identificarsi. Così la tartaruga ha una dimensione psicologica e una matematica. Il fatto che queste due dimensioni si intersechino nella tartaruga mi fa pensare che sia una buona cosa. Si tocca qualcosa di importante e potente.

Si può parlare di antropomorfizzabilità in altri modi piagetiani. Questa affinità tra te e questa entità matematica permette di assimilare la situazione matematica per gli schemi di conoscenza personale. Senza un tale collegamento alla conoscenza personale, questa matematica sarebbe altrimenti astratta. Ma con questo ponte tra la matematica e i propri schemi di azione del corpo, esperienze senso-motorie, e l'immagine di sé, la matematica diventa tangibile, reale e concreta come le torte di fango. Credo che l'introduzione di questa tartaruga dà un nuovo aspetto e nuova percezione di un tema fondamentale di Piaget.

Perché la presenza del computer è così importante per questa struttura madre? Ebbene, la tartaruga può essere introdotta senza computer, ma dubito che la si possa introdurre senza computer ai bambini. Le due cose insieme, la tartaruga e il computer, diventano qualcosa di molto accessibile ai bambini. Possono prenderla e farne ciò che vogliono. Non c'è bisogno di dire loro di antropomorfizzarla. Non c'è nemmeno bisogno di chiamarla tartaruga, che suggerisce una sorta di antropomorfizzabilità. I bambini antropomorfizzano questa cosa del tutto spontaneamente.

Quindi siamo di fronte a un nuovo tipo di struttura e di processo di assimilazione-accomodamento. Forse se avessimo il gusto di Piaget per dare alle strutture i loro "nomi matematici veri," ci piacerebbe chiamarla vettore differenziale. Andrebbe fianco a fianco con le strutture di ordine, topologia e algebra. Piaget non aveva riconosciuto questa nuova struttura perché era in una diversa tradizione matematica. Quindi non poteva vedere la struttura vettore differenziale come sufficientemente distinta, o in una forma che è apparsa nelle attività e i processi di pensiero dei bambini. La natura attiva del computer ci permette di introdurre oggetti come la tartaruga che sono più dinamici e antropomorfizzabili di quelli che esistevano prima

[1] Poiché questo libro è scritto per lettori che potrebbero avere poche conoscenze matematiche, riferimenti specifici a queste conoscenze sono ridotti al minimo, per quanto possibile. Le considerazioni che seguono servono a contestualizzare la discussione per lettori competenti in matematica. L'isomorfismo di sistemi "Tartaruga" differenti è uno dei molti esempi di idee matematiche "avanzate" che nella geometria della Tartaruga si incontrano in forme concrete e utili. Tra queste, i concetti di calcolo infinitesimale sono particolarmente importanti.

Esempio 1: *Integrazione*
La geometria della Tartaruga apre la strada al concetto di integrale di linea attraverso le frequenti occasioni in cui la Tartaruga deve integrare qualche quantità mentre si muove. Di solito la prima circostanza in cui i bambini si imbattono compare con la necessità di tenere traccia di quanto sia ruotata o di quanto si sia mossa la Tartaruga. Un'eccellente progetto è quello di simulare i tropismi che inducono gli animali a cercare condizioni quali calore, luce, concentrazione di cibo, rappresentate come un campo nella forma di una funzione numerica della posizione. È naturale pensare di confrontare due algoritmi integrando la quantità del campo lungo il percorso della Tartaruga. Una versione semplice si può ottenere inserendo nel programma l'istruzione:

```
CHIAMA (:TOTALE + CAMPO) "TOTALE
```

Questa istruzione usa il valore corrente della variabile chiamata "TOTALE" lo somma a quello del "CAMPO e chiama il risultato "TOTALE. Questa versione, però, ha un "bug" che si manifesta quando i segmenti percorsi dalla Tartaruga sono troppo lunghi oppure di lunghezza variabile. Quando si incontrano questi problemi, l'attività di "debugging" permette allo studente di percorrere una significativa progressione verso un concetto più sofisticato di integrale.
La precoce introduzione di una versione semplificata dell'integrazione lungo un percorso illustra il rovesciamento di quello che sembrerebbe l'ordine pedagogico "naturale". Nel curriculum tradizionale, l'integrale di linea è un argomento avanzato al quale gli studenti arrivano dopo essere stati indotti per vari anni a interpretare l'integrale come l'area sotto una curva, un concetto che sembra più concreto nel mondo matematico della tecnologia di carta e matita. Il risultato, però, è quello di sviluppare una visione fuorviante dell'integrale che causa in molti studenti un senso di smarrimento quando incontrano integrali per i quali l'interpretazione come area sotto una curva è decisamente inappropriata.

Esempio 2: *Equazione Differenziale*
Alcuni bambini, oltre all'uso della tartaruga come strumento di disegno, imparano a usare i suoi sensori tattili così le insegnano a cercare o evitare oggetti. Investigare come la tartaruga possa circumnavigare un oggetto è un progetto molto istruttivo. Un gruppo di studenti potrebbe costruire questo programma calandosi nei panni della tartaruga. Cioè provando a usare il tatto per circumnavigare un oggetto, per poi tradurre le strategie messe in atto in comandi per la tartaruga. Quello che segue, è un programma che usa il sensore di tatto per seguire il contorno di un oggetto:

```
PER SEGUI.CONTORNO
RIPETI
AVANTI 1
CONTROLLA.TATTO.SINISTRO        Controlla se tocca qualcosa sul lato sinistro.
SEVERO DESTRA 1                 Se pensa di essere troppo vicina, si allontana.
SEFALSO SINISTRA 1              Se sta perdendo il contatto si gira verso l'oggetto.
FINE
```

In questo programma la Tartaruga usa un metodo che colpisce i bambini come estremamente potente. Un tipico primo approccio alla costruzione di un programma che faccia circumnavigare un oggetto alla tartaruga è di misurarlo e inserirne le dimensioni nel programma. Quindi se l'oggetto è

un quadrato di lato 150 passi di Tartaruga, il programma conterrà l'istruzione AVANTI 150. Anche se funzionasse (in genere non va) questo approccio manca di generalità.
Questo codice fa circumnavigare la Tartaruga intorno a un oggetto di qualsivoglia forma, una volta che essa si trovi con il suo lato sinistro a contatto dell'oggetto (e che l'oggetto e le irregolarità del suo contorno siano grandi rispetto alla Tartaruga). Il programma precedente, invece, lavora facendo piccoli passi che dipendono solo da condizioni nelle immediate vicinanze della Tartaruga. Invece dell'operazione "globale" AVANTI 150 usa solo operazioni "locali" come AVANTI 1. Così facendo la tartaruga intercetta un concetto fondamentale della nozione di equazione differenziale. Ho visto bambini della scuola primaria capire perfettamente perché le equazioni differenziali sono la forma naturale delle leggi del moto. Qui vediamo un altro esempio eclatante di inversione pedagogica: la potenza delle equazioni differenziali è compresa prima del formalismo dell'analisi matematica. Molto di quello che è noto sulla versione della Tartaruga di idee matematiche è raccolto nel libro di H. Abelson e A. diSessa *Turtle Geometry: Computation as a Medium for Exploring Mathematics* (Cambridge: MIT Press, 1981).

Esempio 3: *Invarianti Topologiche*
Supponiamo che la Tartaruga giri intorno a un oggetto sommando via via gli angoli di rotazione, contando positivamente le rotazioni a destra e negativamente quelle a sinistra. Il risultato finale sarà sempre pari a 360° indipendentemente dalla forma dell'oggetto. Vedremo che questo Teorema del Giro Totale della Tartaruga è tanto utile quanto bello.

N.d.T. *I programmi che Papert presenta in Mindstorms fanno riferimento a versioni di Logo sviluppate negli anni 70 nel laboratorio di Intelligenza Artificiale del MIT. Quando il Logo è stato implementato nei primi personal computer alla fine degli anni 70 è stato necessario fare dei compromessi. Anche le versioni del robot tartaruga commercializzate erano meno potenti di quelle sperimentate da Papert. Questo rende difficile ripetere gli esperimenti descritti in Mindstorms. Una lettura del libro di Papert privata della possibilità di misurarsi con gli strumenti proposti rischia di lasciare al lettore un'idea vaga e poco concreta delle idee dell'autore. Il linguaggio Logo ha continuato a evolvere; una sua versione moderna è Scratch, realizzata dal gruppo di ricerca fondato da Papert al Media Lab e ora diretto da Mitch Resnick. Con Scratch possiamo simulare, sullo schermo di un computer, un robot dotato di sensori di contatto e ricostruire il programma* SEGUI.CONTORNO*. Se avete un computer collegato a Internet potrete eseguire, ispezionare e modificare la versione Scratch cliccando su questo link: http://scratch.mit.edu/projects/28302588/*